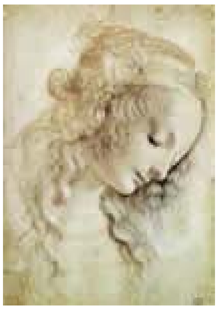
V.10.5: Quinta misión: arte, naturaleza y matemáticas

Introducción



Iccanobif y Nietsnie estaban intrigados, observaban a los humanos y descubrían como se emocionaban ante un paisaje, una flor, un edificio, una escultura, una pintura o al escuchar unos sonidos que definían como música. ¿Por qué esa emoción? ¿Qué podía provocar estos sentimientos? ¿Qué tenían en común? ...... Para intentar descubrir este misterio tomaron una **flor**, una **concha marina**, una foto de un edificio antiguo admirado e imitado (conocido como el **Partenón**), una reproducción de un retrato ante el que los humanos se quedaban absortos, parece ser que era conocido como **La Gionconda** o Mona Lisa y un instrumento musical conocido como violín




Después de múltiples observaciones, de experimentar con sus imágenes, se dieron cuenta de que, curiosamente, la respuesta podría estar en.... ¡eureka!.... las **Matemáticas**.

Cada una de estas figuras contiene en su estructura una misteriosa relación matemática Al dividir entre sí ciertas medidas clave de sus elementos obtenemos siempre el mismo número: 1,618...,y esto sin tener en cuenta la escala de la imagen, ni el patrón elegido.

Este número "mágico" también se puede escribir de esta forma: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

¿Qué no lo entiendes? No te preocupes, a lo largo del tema veremos muchos ejemplos

Un toque histórico

¿Sabrían los humanos la existencia de esta pauta matemática? Buscaron información y.... ¡claro que lo sabían! Esta proporción era bien conocida y utilizada en sus obras artísticas de cualquier época. Se denominaba **número de oro**, **razón áurea** y hasta **divina proporción**. Otro nombre para definir esta proporción era **phi (φ o ϕ)**, en honor a un gran escultor y arquitecto griego de la antigüedad llamado **Fidias** (principal exponente de la época más gloriosa de la Atenas clásica).

Para saber más: Sobre la vida y obra de Fidias, AL FINAL.

Pero, ¡qué casualidad!, también se ajustaba al nombre de un gran matemático italiano de comienzos del siglo XIII, conocido como **Fibonacci** (¿te suena de algo este nombre?, piensa, piensa que quizá ya lo hayas visto a lo largo del tema de otra forma...) (su verdadero nombre era Leonardo de Pisa), famoso por la conocida **sucesión de Fibonacci**, surgida como consecuencia del estudio del crecimiento de las poblaciones de conejos. Esta sucesión está íntimamente ligada al número áureo..... ¡Quién podía imaginarse que la reproducción de los conejos encerraba el "secreto" de la belleza!.... aunque, ¿hay algo más bello que la vida?

Los ocho primeros términos de la sucesión de Fibonacci son:

1, 1, 2, 3, 5, 8,13, 21, ...

Autoevaluación

Pon a prueba tu lógica ¿Podrías decir cuáles son los dos siguientes términos de esta sucesión?

- [ ] a) 25 y 47
- [ ] b) 34 y 55
- [ ] c) 37 y 52

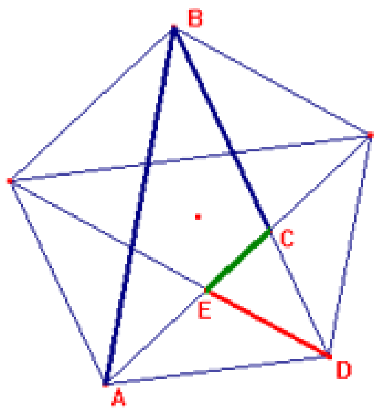
Para saber más: Sobre Fibonacci, AL FINAL.

Descubriendo a phi

¿Cómo descubrieron Nietsnie e Iccanobif la proporción áurea?

Fijaos en la forma de nuestra flor, es **pentagonal** (cinco pétalos), prácticamente regular (podría traducirse esta regularidad en que los cinco pétalos son iguales en forma y tamaño). Este modelo se ajusta a una figura geométrica conocida como pentágono regular estrellado o **pentagrama.**

En esta representación se han señalado algunos segmentos de distinto color: verde, violeta, rojo y amarillo. Si dividimos la medida correspondiente al segmento verde entre la correspondiente al segmento violeta dará como resultado 1,618....., igualmente si dividimos la medida del segmento rojo entre el amarillo volverá a dar como resultado 1,618... Este resultado **no dependerá** de si el pentágono es mayor o menor, si la unidad de medida que tomemos (en todo caso siempre la misma) sean milímetros, centímetros, pulgadas o kilómetros. Es una proporción estable y que **siempre dará como resultado 1,618......φ**

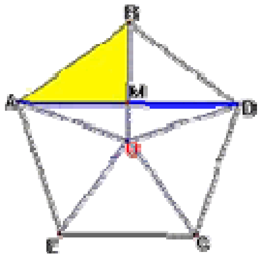


Podemos verlo más gráficamente en esta nueva representación:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{DE} = \frac{DE}{EC} = 1{,}618\ldots\ldots = \varphi$$

Autoevaluación:

¿Estarían la diagonal AD y el lado AB de un pentágono regular en proporción



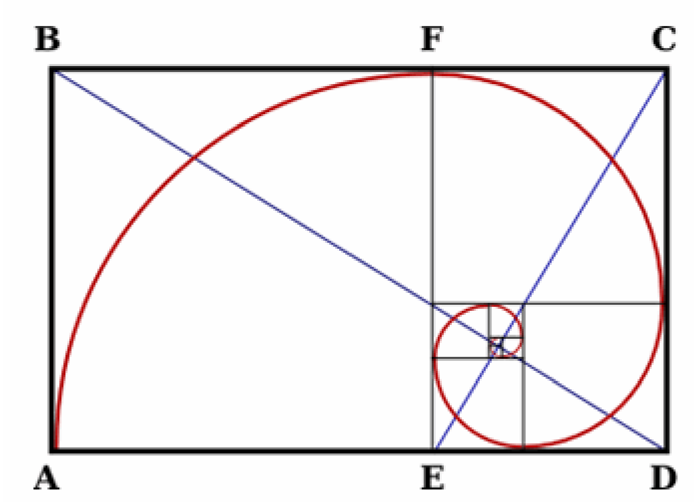
áurea?

- ☐ a) Sí, siempre
- ☐ b) No
- ☐ c) Depende del tamaño del pentágono

Seguimos con el segundo objeto**: La concha marina** conocida también como Nautilus

Esta preciosa pieza nacarada, equivaldría a una de las figuras matemáticas más bella, la **espiral logarítmica**.

Tomando una representación de dicha espiral logarítmica, o de Durero, podremos observar un hecho curioso:



Está formada por sucesivos rectángulos en proporción aurea, por ejemplo el rectángulo ABCD es áureo, es decir:

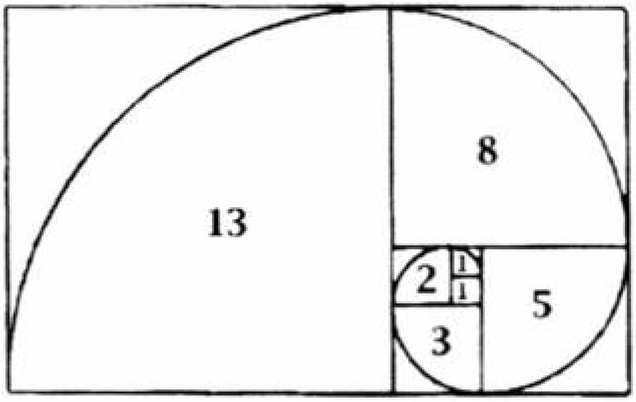
$$\frac{AD}{AB} = 1{,}618\ldots\ldots = \varphi$$

El rectángulo EFCD es igualmente áureo:

$$\frac{EF}{ED} = 1{,}618\ldots\ldots = \varphi$$

y así sucesivamente. Además podemos ver otra curiosa cualidad de esta espiral:

Para la construcción partimos desde un pequeño rectángulo áureo (de color rojo). Ayudándonos de arcos iremos construyendo cuadrados, que en conjunto se irán formando otros **rectángulos áureos**. De esta forma los arcos trazados constituyen una espiral logarítmica. Además, podemos observar cómo elementos de la sucesión o serie de Fibonacci aparecen reflejados proporcionalmente a las unidades de medida que hayamos usado para la construcción de la espiral. En esta otra imagen se observa mucho mejor:

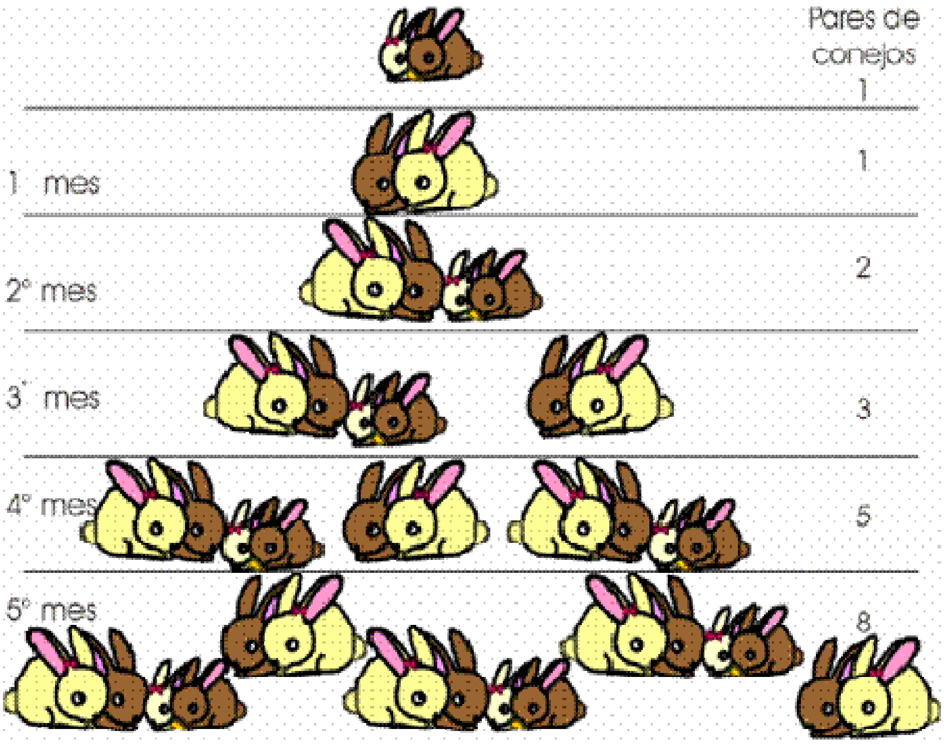


¿Qué secreta relación habrá entre el número áureo y la sucesión o serie de Fibonacci? En el siguiente apartado tienes la respuesta gracias a los conejos.

Los conejos, la sucesión de Fibonacci y el número de oro

Supongamos que tenemos una pareja de conejos recién nacidos, deberán esperar un mes para poder reproducirse, teniendo una nueva pareja de conejitos, así al cabo de dos meses serán dos las parejas: la inicial y la pequeñita. En el tercer mes la primera pareja se vuelve a reproducir, teniendo una nueva parejita, los pequeños no se reproducen porque aún deben madurar. En el cuarto mes ya hay dos parejas reproductivas y una inmadura, en total cinco.

Si seguimos la misma pauta aparecerá los números que conforman la serie de Fibonacci, observa la siguiente imagen:



Recogemos los datos en la siguiente tabla:

Fin de mes	Pares de conejos recién nacidos	Pares de conejos adultos	Total de pares de conejos
0	1	0	1
1	0	1	1
2	1	1	2
3	1	2	3
4	2	3	5
5	3	5	8
6	5	8	13
7	8	13	21
8	13	21	34
9	21	34	55
10	34	55	89
11	55	89	144
12	89	144	233

Jugando con los términos de la sucesión de Fibonacci (que coinciden, como puedes observar con el total de pares de conejos) se obtendría una curiosa propiedad:

Al dividir un término entre el anterior se va obteniendo un cociente que cada vez se aproxima más y más al valor del número de oro.

Puedes verlo en esta tabla: (Tomamos como valor aproximado de phi con una precisión de diez cifras decimales al número **1,6180339887**)

Muy importante:

Jamás podremos escribir con cifras el valor de phi al ser un número irracional, es decir, un número con infinitas cifras decimales no periódicas. Por tanto cualquier valor que tomemos para phi no será más que una mera aproximación. Otros números irracionales famosos serían π, e, √2, etc.....

Cociente	Diferencia en valor absoluto con phi	Cifras decimales de aproximación a phi
1 : 1 = 1	0,61803398 ...	0
2 : 1 = 2	0,38196601 ...	0
3 : 2 = 1,5	0,11803398 ...	0
5 : 3 = 1, 66666666 ...	0,04863267 ...	1
8 : 5 = 1,6	0,01803398 ...	1
13 : 8 = 1, 625	0,00696601 ...	2
21 : 13 = 1,61538461...	0,00264937 ...	2
34 : 21 = 1,61904776 ...	0,00101363 ...	2
55 : 34 = 1,61764705 ...	0,00038692....	3

Cuanto más prolonguemos esta tabla, veremos como el cociente está cada vez más próximo al valor de las primeras cifras decimales de phi. Los matemáticos tienen una forma peculiar de transcribir esta propiedad, sería algo así:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f_n}{f_{n-1}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$$

No te preocupes, es extraño pero sencillo de comprender, significaría que si seguimos dividiendo cada término de esta sucesión entre el anterior hasta el infinito (bueno, lo más que podamos), llegaremos al valor exacto de phi. Esto es lo que se llama un límite en el infinito...... pero calma, no te lo pediremos... ¿o sí?......

Autoevaluación:

¿Cuál es el valor del cociente, con diez cifras decimales, entre los términos vigésimo primero y vigésimo de la sucesión de Fibonacci? ¿A cuántas cifras decimales de phi nos aproximaremos?

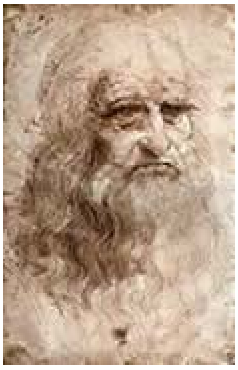
- [ ] a) 10946 : 6765 = 1,6180339985

  aproximación a 7 cifras decimales de phi
- [ ] b) 10477 : 6475 = 1,6180694980

  aproximación a 4 cifras decimales de phi
- [ ] c) 10477 : 6475 = 1,6180694980

  aproximación a 5 cifras decimales de phi

Creando con phi



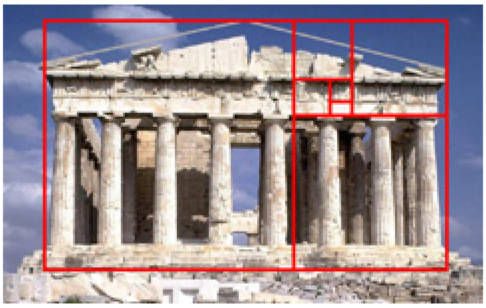
Iccanobif y Nietsnie se sorprendieron al descubrir que ya desde unas de las épocas más antiguas de la historia de este curioso planeta, el llamado antiguo Egipto, se trabajaba siguiendo las pautas de la proporción áurea, prueba de ello eran las famosas y misteriosas **pirámides**. Posteriormente se le puso nombre propio al uso de esta proporción de forma reiterativa, Fidias y la Acrópolis de Atenas eran, más que un homenaje a los dioses, un homenaje a la razón.... a la razón áurea.

Pero les intrigó aún más un "loco" de la divina proporción, uno de los mayores sabios de la historia humana, el gran **Leonardo da Vinci**. Él era un ejemplo de unión de ciencia, arte, invención, él era Phi con mayúsculas.

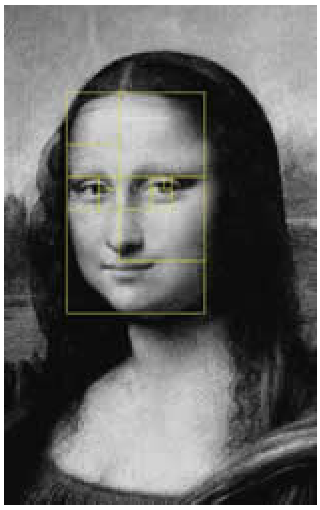
Volvamos a nuestros ejemplos, primero uno arquitectónico: **el Partenón**.

Todo él está repleto de la proporción áurea. Este edificio, hoy en forma de "ruinas" es uno de los más imitados a lo largo de la historia, ejemplo de equilibrio, sobriedad y grandeza arquitectónica.

En la siguiente imagen se muestran algunos de los rectángulos áureos que esconde entre sus viejas piedras:



¿No recuerda a la forma matemática del Nautilus, a la espiral?



El otro ejemplo era el cuadro de la Gioconda o Mona Lisa de Leonardo da Vinci, quizá uno de los mayores tesoros del Museo del Louvre (Paris):

Su rostro, su misteriosa sonrisa, su mirada, todo está envuelto en una serie de rectángulos áureos. Un claro ejemplo de "estudiada naturalidad"

¿Cómo se podía construir un rectángulo áureo? Puedes verlo en el enlace:

http://www.juntadeandalucia.es/educacion/elearning/enterprising/file.php/31/bloque04/contenidos/tema5/media/60_construyendo_phi.htm

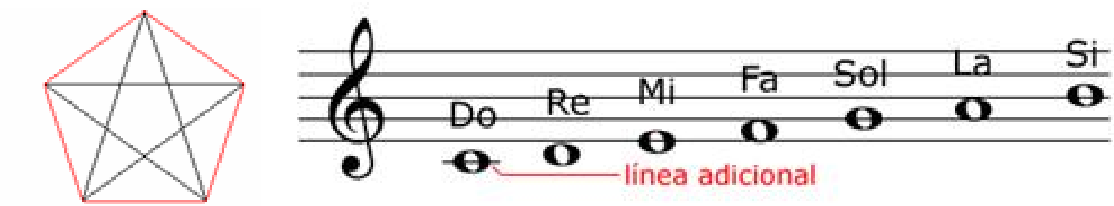
Autoevaluación:

En la presentación hemos visto que para descubrir el valor de phi es necesario el Teorema de Pitágoras, otro de los grandes matemáticos relacionado íntimamente con la proporción áurea. Vamos a ver si te has enterado bien, contestando a la siguiente cuestión: ¿Cuál es el valor de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden respectivamente 3 cm y 4 cm?

- [ ] a) 7 cm
- [ ] b) 25 cm
- [ ] c) 5 cm

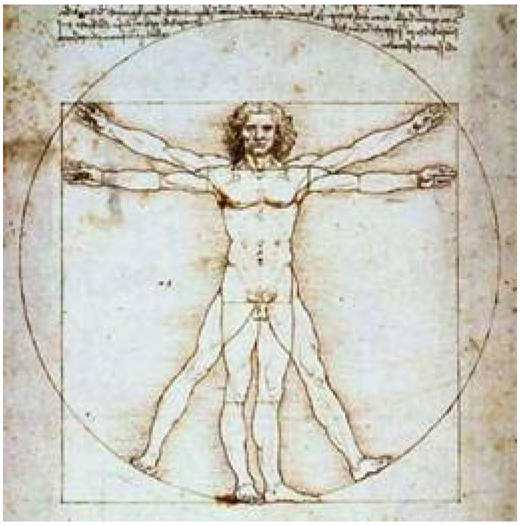
La unión entre Arte y Matemáticas no sólo se basa en la proporción áurea, existen infinidad de ejemplos que llevarían años de estudio. En Andalucía se encuentran dos ejemplos de interés y belleza sin igual, la **Proporción cordobesa** (**c**) y los **frisos y mosaicos de la Alhambra** de Granada.

También se quedaron maravillados al descubrir la proporción áurea en el violín, ¿magia?... no. La música, los instrumentos musicales y las matemáticas están íntimamente ligados, de ello la primera escala musical, "pentatónica" fue un invento pitagórico...¿Os suena el término pentagrama?.....



Las "efes" de los violines están colocadas siguiendo la razón áurea. Las sonatas de **Mozart**, la Quinta de **Beethoven**, **Debussy**, etc., tienen relación con la proporción áurea

El gran secreto de Phi



El ser humano tiene tendencia a sentirse el centro del Universo, lo más bello para ellos y ellas es otro ser humano, ¿o no se ha estado nunca enamorado o enamorada?. Además son a la vez creación y creadores, y tienden a hacer las cosas a "su imagen y semejanza", y ¿cuál es su imagen y semejanza?..... desde luego su semejanza es la proporción áurea.

Observa la imagen de la izquierda, es el conocido como "**Hombre de Vitrubio**" de Leonardo da Vinci. Se trata de un estudio de las proporciones del cuerpo humano, realizado a partir de los textos del arquitecto de la antigua Roma, Vitrubio, del que el dibujo toma su nombre. El cuadrado está centrado en los genitales, y el círculo en el ombligo. La relación entre el lado del cuadrado y el radio del círculo es la **razón áurea**.

Para Vitruvio el cuerpo humano está dividido en dos mitades por los órganos sexuales, mientras que el **ombligo** determina la sección áurea. En el recién nacido, el ombligo ocupa una posición media y con el crecimiento *migra* hasta su posición definitiva en el adulto.

El dibujo también es a menudo considerado como un símbolo de la simetría básica del cuerpo humano y, por extensión, del Universo en su conjunto.

Conclusión: Existiría una razón "científica" que explicaría porque los humanos prefieren al hombre de la primera foto antes que al de la segunda

Conociendo ya el "secreto de phi" no es de extrañar que la proporción áurea impregne muchos de los **diseños** de los objetos creados por los humanos, desde la forma de un **coche**, de una **ventana**, de un **libro**, de un **pupitre**, la clásica **calculadora**, de cómo se ha construir **una habitación** para que el sonido sea perfecto en ella,..., hasta algo muy importante, desgraciadamente para todos, cuando llegamos a fin de mes: la **tarjeta de crédito**, la **billetera** y el **DNI** . En la **arquitectura** y el **diseño** de mediados del siglo XX, surgió un sistema denominado "**Modulor**" ideado por el arquitecto **Le Corbusier**. La idea principal era que el diseño debía estar a "escala humana", es decir, manteniendo las proporciones áureas.

Fidias

Fidias (498-432 Antes de Cristo)

Nació en Atenas, Grecia. Es considerado representante emblemático de la **escultura griega**. Sus trabajos más importantes y conocidos fueron realizados para formar parte del templo **Partenón**, cuya construcción fue ordenada por Pericles. Fidias fue el arquitecto, director de obras y decorador a cargo de este proyecto y para ello esculpió varias obras que en nuestros días aun son ejemplo de escultura helénica clásica.

Debido a los destrozos y saqueos causados por invasiones extranjeras, pocos trabajos originales del maestro se conservan hasta hoy. En el interior del Partenón creó dos estatuas gigantes cuyos originales ya no existen y en su exterior labró el mármol en forma magistral logrando la combinación perfecta de sus tallados y el estilo Jónico utilizado en las edificaciones atenienses más refinadas. De estos esculpidos con escenas históricas, religiosas y mitológicas aun se guardan fragmentos.

Fidias ejecutó sus obras en mármol, bronce y también materiales de alto valor como marfil y oro. Existen varias réplicas de sus estatuas, que otros artistas griegos de la antigüedad esculpieron para mantener vivo su magnífico legado.

La escuela de escultura griega es sin duda parte fundamental del inicio y desarrollo universal de este arte. De ella nace la corriente inspiradora que llevó a otros pueblos europeos a conferir a esta plástica una importancia mayor que a otras artes, a veces incluso cercana a lo divino, y que sólo fueron logradas por escultores de máximo nivel.

Fidias es un perfeccionista innato y la gracia presente en sus figuras consigue inmortalizar el sentimiento filosófico y espiritual en el arte de su época cuyo propósito principal era plasmar los aspectos imperecederos y permanentes de la **belleza humana** más que los detalles inherentes del modelo específico.

SU OBRA MÁS IMPORTANTE:

El Partenón, símbolo de Atenas, está emplazado en la cima de la Acrópolis, dominando la ciudad. Es el templo sagrado de la diosa Atenas, protectora de la ciudad; con su simple estilo dórico ha inspirado a la arquitectura oficial en todo el mundo. Fue construido casi exclusivamente en mármol blanco, la misma fue iniciada por Pericles y realizada entre los años 447 y 432 AC. **Gran parte de la decoración escultórica fue realizada por el famoso escultor Fidias**.
Durante el sitio veneciano de 1687 fue utilizado por los turcos como polvorín. Lamentablemente una de las bombas cayó en el templo y destruyó gran parte del mismo.

¿Quién fue Fibonacci?

Leonardo de Pisa, mejor conocido por su apodo Fibonacci (que significa hijo de Bonacci) nació en la ciudad italiana de Pisa y vivió de 1170 a 1250. Su padre trabajaba como representante de la casa comercial italiana más importante de la época, en el norte de África. Este lo animó a estudiar matemáticas. Leonardo recibió este tipo de enseñanza de **maestros árabes**. Se convirtió en un especialista en Aritmética y en los distintos sistemas de numeración que se usaban entonces. Convencido de que el **sistema indo-arábigo** (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) era superior a cualquiera de los que estaban en uso, como por ejemplo el romano (I, V, X, L, C, D, M), decidió llevar este sistema a Italia y a toda Europa, en donde aún se usaban los numerales romanos y el ábaco. Por tanto se le considera el introductor del **número cero** en Occidente, ya que hasta entonces no se conocía en Europa (¿curioso no?).

Escribió gran cantidad de libros y textos de matemáticas: *Liber Abaci* escrito en 1202, *Practica Geometriae* en 1220, *Flos* en 1225 y *Liber Quadratorum* en 1227. Es importante destacar que en esa época no existía la imprenta, por lo tanto los libros y sus copias eran escritos a mano. Fue sin duda el matemático más original de la época medieval cristiana.

Debemos reconocer en él a uno de los primeros hombres que llevó la matemática árabe a Europa además de poner muy en alto el nombre de la matemática griega y darla a conocer entre los mercaderes y comerciantes, es decir sacarla de los monasterios y el monopolio de los eruditos.

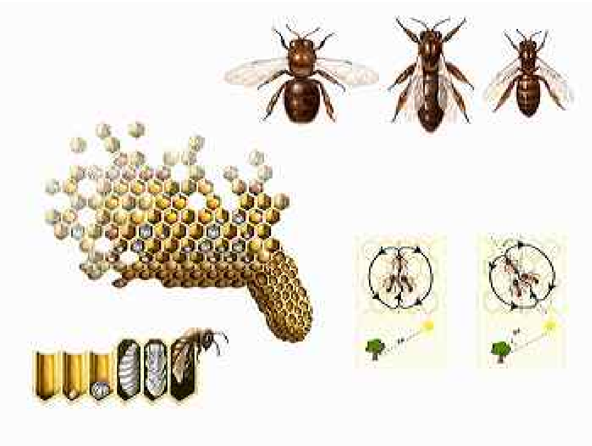
La sucesión de Fibonacci es la sucesión de números empezando por la unidad en la que cada cual es la suma de sus dos números anteriores. Serían entonces:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233...

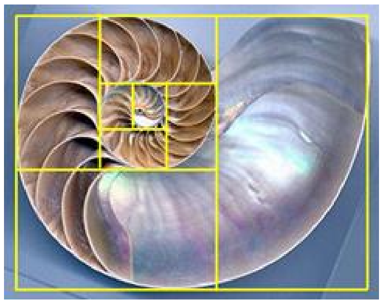
Podemos encontrar estos números de manera sorprendente en la **naturaleza**. Por ejemplo:

- Las **ramas** y las **hojas** de las plantas se distribuyen buscando siempre recibir el máximo de luz para cada una de ellas. Por eso ninguna hoja nace justo en la vertical de la anterior. La distribución de las hojas alrededor del tallo de las plantas se produce siguiendo secuencias basadas exclusivamente en estos números.
- El **número de espirales** en numerosas **flores** y **frutos** también se ajusta a parejas consecutivas de términos de esta sucesión: los **girasoles** tienen 55 espirales en un sentido y 89 en el otro, o bien 89 y 144.

- Las **margaritas** presentan las semillas en forma de 21 y 34 espirales.
- Y cualquier variedad de **piña** presenta siempre un número de espirales que coincide con dos términos de la sucesión de los números de Fibonacci, 8 y 13; o 5 y 8.
- Las **abejas** también tienen relación con las series de Fibonacci: si se observan las celdas hexagonales de una colmena y se coloca a una abeja en una cualquiera de ellas, y se le permite alimentar a la larva, suponiendo que continuará siempre por la celda contigua de la derecha, veremos que hay sólo una ruta posible para la siguiente celdilla; dos hacia la segunda, tres hasta la tercera, cinco hasta la cuarta, ocho rutas posibles hacia la quinta, etcétera.



- Y, ya que estamos a ello, diremos que los machos o zánganos de la colmena tienen árboles genealógicos que siguen estrictamente una distribución de Fibonacci. En efecto, los machos no tienen padre, por lo que él (1), tiene una madre (1, 1), dos abuelos —los padres de la reina— (1, 1, 2), tres bisabuelos —porque el padre de la reina no tuvo padre— (1, 1, 2, 3), cinco tatarabuelos (1, 1, 2, 3, 5) y ocho tataratatarabuelos (1, 1, 2, 3, 5, 8).

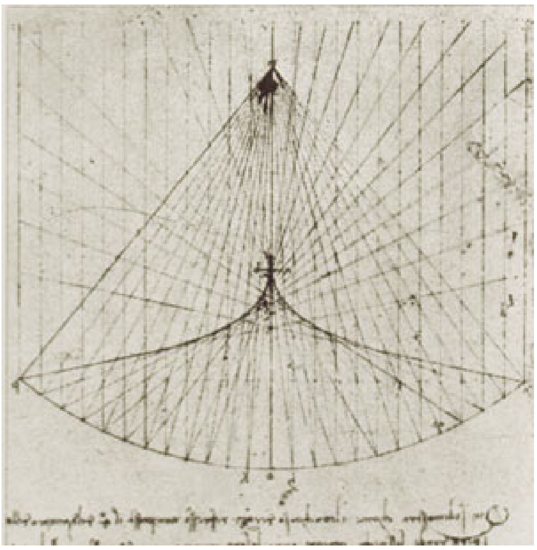


- Muchas de las **conchas marinas** tienen un crecimiento siguiendo de nuevo la pauta de esta sucesión
- Los **ciclones** y otras manifestaciones atmosféricas …..hasta las olas que se levantan en el mar sigan en su forma la estructura de la sucesión.

Parece que el mundo vegetal y animal tengan programados en sus códigos genéticos del crecimiento los términos de la sucesión de Fibonacci.

Las aplicaciones de los números de Fibonacci son también, al parecer, infinitas: se utilizan en generación de **números al azar**, en problemas de matemáticas avanzadas relacionados con **derivadas**, en trabajos de **clasificación de datos**, en **recuperación de información** en ordenadores, y mil etcéteras más.

También la **física** parece adorar las sucesiones de Fibonacci. Si se colocan dos láminas planas de vidrio en contacto y se hace que unos rayos luminosos las atraviesen, algunos (dependiendo del ángulo de incidencia) las atravesarán sin reflejarse, pero otros sufrirán una reflexión. El rayo que no sufre **reflexión** tiene sólo una trayectoria posible de salida; el que sufre una reflexión tiene dos rutas posibles; el que sufre dos reflexiones, tres trayectorias, el que experimenta tres reflexiones, cinco, y así sucesivamente. Tenemos aquí nuevamente una serie de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8...



Pero no toda acaba aquí, tiene aplicaciones en el **Arte**, la **Literatura**, la **Música** y hasta en los **mensajes secretos**, de hecho los números de esta sucesión son la clave principal del famoso bet seller *“El código da Vinci”*